2　常微分方手式の解法

今回は次回に重力多体系の問題を調べる準備として実用的な常微分方程式の積分法であるルンゲクッタ法を復習する。

2.1　(陽的) 4 段ルンゲクッタ法

連立常微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1}$$

を解くことを考える。

以下は時間に関して 4 次までのテーラー展開と等しい式を与えるための評価式である。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4) \\
\boldsymbol{k}_1 &= dt\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n, t_n) \\
\boldsymbol{k}_2 &= dt\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + \frac{\boldsymbol{k}_1}{2}, t_n + \frac{dt}{2}) \\
\boldsymbol{k}_3 &= dt\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + \frac{\boldsymbol{k}_2}{2}, t_n + \frac{dt}{2}) \\
\boldsymbol{k}_4 &= dt\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{k}_3, t_n + dt)
\end{aligned} \tag{2}$$

一般にこの $\boldsymbol{x}$ はベクトル量であり、連立微分方程式の解法となっている。ここではまず例として簡単な連立ではない微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x(1+y)$$

を取り上げてプログラムを解説する。この微分方程式は解析解

$$y = C\exp(x^2/2) - 1$$

を持つので、プログラムが正しく動作しているかどうかチェックが可能である。→ コードへ

コードを理解して動かせたら

- 結果を gnuplot で表示し、解析解と比較せよ。
- $\frac{dy}{dx} = \sin x \sin y, \quad y(0) = 1$ を $0 \leq x \leq 3$ で解き、プロットせよ。

次に一次元調和振動子の運動を解くことを考える。一次元調和振動子は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

と書くことができる（振動数を１にした）が、このままでは２階の微分方程式なのでそのままではルンゲクッタ法が使えない。そこで解く為に、微分の階数を下げて変数を増やすことを考える。粒子の速度 v を導入すると、運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -x \qquad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad (4)$$

となる。こうなると２変数の連立一次の微分方程式なので、式（２）のルンゲクッタ法が使える。

- 実際にコードをかけ。
- 適当な初期条件から計算できたら結果を出力し、正弦関数になることを確認せよ。

2.2 提出課題

固定された中心力ポテンシャル

$$\phi(r) = -\frac{1}{r}$$

中を運動する質量１の粒子の３次元的運動を解くプログラムを作れ。粒子の座標と速度を変数とすると６元連立微分方程式となる。初期条件を変えて運動の様子がどのように変わるか調べよ。余裕があれば粒子を一つ増やし、２粒子間に相互作用がある場合を計算してみよ。