12　数値流体計算

前回に引き続き流体計算を数値的に解く方法について学ぶ。

12.1　ランケ-ユゴニオの関係

圧縮性流体では、音速をこえる波、衝撃波が発生する。衝撃波では物理量は不連続に変化する。ここではその前後での物理量の変化を見てみよう。

衝撃波の前後であっても、連続の式、運動量保存則、エネルギー保存則は成り立つはずである。ここで、一次元の定常な流れを仮定する (このことは衝撃波静止系で考えるということを意味している) と、時間微分の項が 0 となるので、それぞれ

$$\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(\rho v^2 + P\right)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\left(e + P\right)v}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

となる。ここで、観測者系での速度 v' と衝撃波静止系での速度 v の関係は、衝撃波の速度を U とすると $v + U = v'$ と書ける。

波面前方の物理量を添え字 1、波面後方の物理量を添え字 2 で表すと、上の式はそれぞれ

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{4}$$

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2 \tag{5}$$

$$\left(e_1 + P_1\right)v_1 = \left(e_2 + P_2\right)v_2 \tag{6}$$

と書きなおすことができる。理想気体の場合、e は γ、ρ、P を与えると一意に決まることに注意すると、式が 3 本あり、変数が 6 つ存在するので、変数を 3 つ、例えば波面前方の物理量、ρ_1、v_1、P_1 を与えれば、波面後方の物理量が求められる。この 3 つの関係式のことをランケ-ユゴニオの関係式と呼ぶ。

音速が $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$、マッハ数が $M = v/c$ と与えられるので、上の式を解くと、

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\left(\gamma+1\right)M_1^2}{\left(\gamma-1\right)M_1^2 + 2} \tag{7}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - \left(\gamma-1\right)}{\gamma+1} \tag{8}$$

という関係式が得られる。

12.2　リーマン問題

一次元流体の振る舞いを記述する式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ (e+P)\,v \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

で与えられることを前回学んだ。以下では、前回学んだように $\overrightarrow{U} = (\rho, v, P)^T$ として考えよう。

まず、簡単のために、左側に $\overrightarrow{U_\mathrm{L}}$、右側に $\overrightarrow{U_\mathrm{R}}$ という物理量を持つ流体を置いてみよう。このような一次元問題をリーマン問題と呼ぶ。

前回の特性曲線に関する議論を考えると、リーマン問題は $\lambda_1 = v - c$、$\lambda_2 = v$、$\lambda_3 = v + c$ という 3 つの固有値に対応した 3 つの波を持つ。この 3 つの波によってこの領域は図 1 のような 4 つの状態、$\overrightarrow{U_\mathrm{L}}$、$\overrightarrow{U_\mathrm{L*}}$、$\overrightarrow{U_\mathrm{R*}}$、$\overrightarrow{U_\mathrm{R}}$ に分けられる。

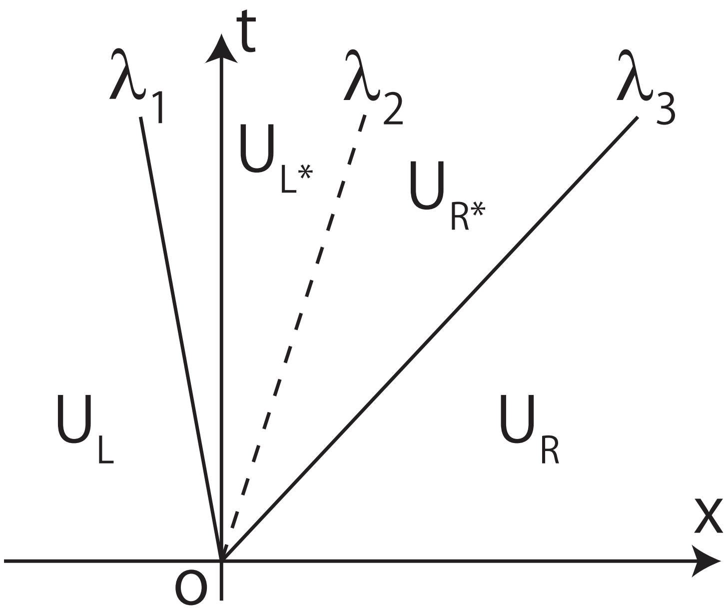

図 1: リーマン問題の解

これらの波のうち、λ_2 に対応する境界は接触不連続面と呼ばれ、$t = 0$ で左側と右側に存在した物質の境界であるが、λ_1、λ_3 に対応する境界は、物理量が不連続の場合は衝撃波、物理量が連続の場合は希薄波となっている。

ここで、λ_1 に対応する波が希薄波であるための条件は

$$\lambda_1(\overrightarrow{U_\mathrm{L}}) \le \lambda_1(\overrightarrow{U_\mathrm{L*}}) \tag{10}$$

衝撃波であるための条件は

$$\lambda_1(\overrightarrow{U_\mathrm{L}}) \ge S_1 \ge \lambda_1(\overrightarrow{U_\mathrm{L*}}) \tag{11}$$

である。ここで、S_1 は衝撃波の速度である。また、λ_3 に対応する波の場合は符号が逆となる。一方、接触不連続面上では、

$$\lambda_2(\overrightarrow{U_{\mathrm{L}*}}) = \lambda_2(\overrightarrow{U_{\mathrm{R}*}}) = S_2 \tag{12}$$

という関係が成り立っている。ここで、S_2 は接触不連続面の速度である。

計算の詳細は省くが、接触不連続面で保存すべき量に注目して計算すると、接触不連続面を挟んで、圧力と速度が一定であるということが分かり、$P_{\mathrm{L}*} = P_{\mathrm{R}*}$、$v_{\mathrm{L}*} = v_{\mathrm{R}*}$ となる。一方で、希薄波を挟んだ領域間では、エントロピーと以下のリーマン不変量

$$v + \frac{2c}{\gamma - 1} \qquad \mathrm{for}\lambda_1 \tag{13}$$

$$v - \frac{2c}{\gamma - 1} \qquad \mathrm{for}\lambda_3 \tag{14}$$

が一定となる。また、衝撃波を挟んだ領域間ではランケ-ユゴニオの関係式が成り立つ。

以上の関係式を用いて、リーマン問題を解くことのできるプログラムが web においてある。内容は難しいのであまり触れないが、興味のある人は自分で勉強してみること。

12.3 ゴドノフ法

前節で導いた手法を用いて流体を数値的に解く手法をゴドノフ法と呼ぶ。その手法を簡単に紹介しよう。

まず、図 2 のような密度、速度、圧力分布を持つ流体を考えよう。

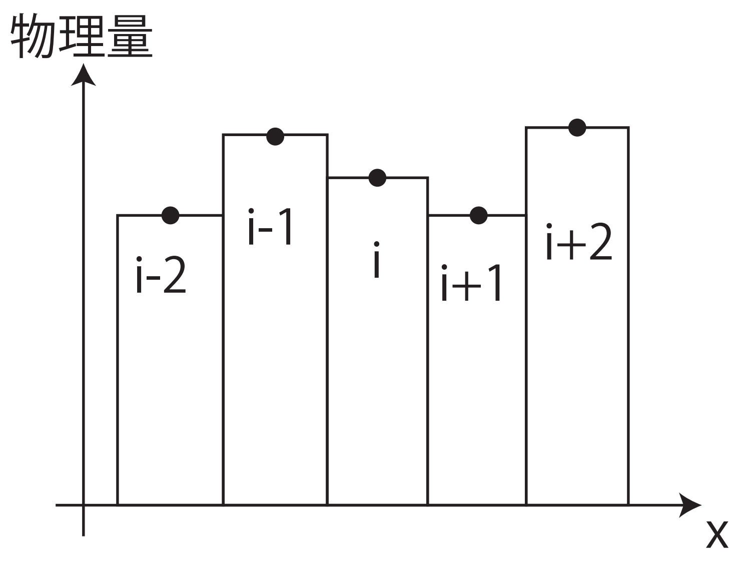

図 2: 数値計算の格子

数値計算において、各メッシュの物理量は図 2 のようにそれぞれの配列に入れられている。各メッシュの物理量は、各メッシュの中心 (黒丸) の位置で定義している場合もあるが、その場合であっても各メッシュ中では物理量が一定である (長方形) と考えることができる。

(実際にエネルギーなどを積分する際は、各メッシュ中で物理量が一定であると考え積分する場合が多い。)

そうすると、各メッシュ間では、左側に $\overrightarrow{U_\mathrm{L}}$(例えば $\overrightarrow{U_\mathrm{i}}$)、右側に $\overrightarrow{U_\mathrm{R}}$(例えば $\overrightarrow{U_\mathrm{i+1}}$) という物理量を置いたリーマン問題と考えることができる。それぞれの時間ステップで各メッシュ間でのリーマン問題を解いて、その結果を各メッシュで積分した値を次に時間ステップの値とするのが、ゴドノフ法と呼ばれる手法である。

12.4　ロー-パイク法

ゴドノフ法は様々な問題に適用できる優秀な手法であるが、各メッシュ間でリーマン問題を解かなければならないため、比較的計算時間がかかってしまう。そこで、その問題を解決するためによく用いられている手法が近似リーマン解法という手法でその中の一つにロー法と呼ばれる手法がある。

流体力学の式、

$$\overrightarrow{U}_t + \overrightarrow{F(U)}_x = 0 \tag{15}$$

は、ヤコビアン

$$A(\overrightarrow{U}) = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{U}} \tag{16}$$

を用いて、

$$\overrightarrow{U}_t + A(\overrightarrow{U})\overrightarrow{U}_x = 0 \tag{17}$$

と書き表すことができる。このヤコビアンは $\overrightarrow{U}$ に依存するので、位置、時間によって変わってしまう。

近似リーマン解法では、この $A(\overrightarrow{U})$ を、一定の値 $\tilde{A}(\overrightarrow{U_\mathrm{L}}, \overrightarrow{U_\mathrm{R}})$ で近似し、流体の式を

$$\overrightarrow{U}_t + \tilde{A}(\overrightarrow{U_\mathrm{L}}, \overrightarrow{U_\mathrm{R}})\overrightarrow{U}_x = 0 \tag{18}$$

という線型な式に変換し、$\tilde{A}$ の固有値、固有ベクトルを用いて解く。

数値計算手法の詳細は省くが、ロー-パイク法を用いた計算コードが web に置いてあるので、動かしてみよう。

動かすことができたら、

ロー-パイク法を用いてリーマン問題を解き、解析解と比較せよ。

このとき、Δx の大きさによって解析解からのずれがどのように変わるのか考えよ。

web に置いてあるプログラムは左側と右側に異なる物理量を入れて解くことができるが、任意の初期分布で計算が行えるように改良せよ。例えば $\exp(-x)$ や $\cos(x)$ に比例する形で初期分布を与え、計算してみよ。

12.5　提出課題

衝撃波が存在するような初期条件でロー-パイク法を用いて計算を行い、衝撃波前方の密度、圧力、速度と衝撃波後方の密度、圧力、速度の関係が、ランケ-ユゴニオの関係式を満

たすことを確認せよ。(ヒント:衝撃波の速度を求め、それを用いてランケ-ユゴニオの関係式を解く。出力ファイルに書き出されている速度は観測者系での速度であることに注意すること。)

非常に強い衝撃波の場合、衝撃波前方 (ρ_1) と後方 (ρ_2) の密度の比 (ρ_2/ρ_1) はある値を超えることができない。その値を求め、その理由を明らかにせよ。

(余裕がある人用)

ゴドノフ法の計算コードを作成してみよ。

提出期限：次回授業開始時