3　自己重力多体系のビリアル定理

今回は前回復習したルンゲクッタ法を用いて、自己重力多体系のビリアル定理が成り立っていることを数値シミュレーションを通じて確認することを目的とする。

3.1　ビリアル定理

自己重力系のビリアル定理とは、重力相互作用する多粒子系の長時間平均した運動エネルギーが、長時間平均した重力ポテンシャルエネルギーの（絶対値の）半分に等しい、というものである。以下で具体的に説明する。

まず N 個の質点系を考え、以下のような量を考える。

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha \tag{1}$$

この量の時間微分は、

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha \tag{2}$$

この式の右辺第二項は、系の全運動エネルギーを K と書くと、

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^2 = 2K \tag{3}$$

とかける。一方、重力相互作用を考えた運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{p}}_\alpha = \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} \frac{Gm_\alpha m_\beta(\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha)}{|\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta|^3}$$

を使って式 (2) の右辺第一項を評価すると、

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} \frac{Gm_\alpha m_\beta(\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha}{|\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta|^3} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N} \frac{Gm_\alpha m_\beta(\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha}{|\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta|^3} + \sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq\beta}^{N} \frac{Gm_\alpha m_\beta(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta)\cdot\boldsymbol{r}_\beta}{|\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta|^3}\right]
\end{aligned}$$

こ個で一段目の式から二段目は、α と β に関して互いに等しくないものをすべて和を取る計算であるから、添え字の名前を付け替えても答えがおなじであることを使っている。

この式をさらに変形すると、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta|^3}(2\boldsymbol{r}_\beta\cdot\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\alpha^2-\boldsymbol{r}_\beta^2) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta|^3}(\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta)\cdot(\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^{N}\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta|} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となり、全ポテンシャルエネルギー Ω に等しい。ここで前の 1/2 のファクターは 2 つ粒子のペアのポテンシャルをダブルカウントしないようについていることになる。したがってもとの式 (2) は、

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{p}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\alpha=\Omega+2K \qquad (5)$$

とかける。

次にこの式を長時間にわたって平均した量を考える。長時間平均とは長時間 T にわたって積分し、その後 T で割るということであるから、左辺の平均は、

$$
\begin{aligned}
\overline{L.H.S.} &= \frac{1}{T}\int_0^T\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{p}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\alpha dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{\alpha=1}^{N}[\boldsymbol{p}_\alpha(T)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha(T)-\boldsymbol{p}_\alpha(0)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha(0)]
\end{aligned}
$$

今もし運動が $T\to\infty$ の極限でも有界であれば、

$$|\boldsymbol{p}_\alpha(T)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha(T)|<+\infty$$

であるので、$T\to\infty$ で、式 (5) の左辺の平均は明らかにゼロになる。結局、式 (5) のの長時間平均は、

$$\bar{\Omega}+2\bar{K} \quad =0$$

となる。これが自己重力系のビリアル定理である。

3.2 N 体シミュレーション

この定理を示すために実際に重力多体系の数値シミュレーションを行ってみよう。計算能力の関係でここでは 50 粒子程度の小さな系で計算をおこなう。先週復習したルンゲクッタの方法を用いてコードを組んである。→プログラム

プログラムを改造して、系全体のエネルギーや運動量はどの程度保存しているか調べよ。

3.3 提出課題

プログラムを改造して、ビリアル定理が成り立つかどうか調べよ。