

6 太鼓の振動とベッセル関数

先週は箱型の領域内で、与えられた境界条件から静電場を求める問題を取り扱った。今回も境界値問題を取り扱うが、扱う方程式を波動方程式とし、考える領域の形を円形とする。境界の形が箱型から円形になったために、先週のように解が単純な \sin や \cos にならず、ベッセル関数というよく知られた特殊関数で記述される。物理的には丸い枠に張られた太鼓の振動の様子を記述する、ということになる。今回はこのタイプの境界値問題を理解し、かつベッセル関数がどのようなものであるかを知ることが目的とする。

6.1 2次元波動方程式の変数分離による解法

今回は以下の 2 次元波動方程式を与えられた境界条件で解くことを考えよう。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

しかしこの方程式を円形の膜の振動を取り扱うので、 $x-y$ のカーテシアン座標はあまり適当でない。円形の膜の中心を原点とする極座標 $\rho - \phi$ に座標を変換すると、右辺のラプラシアンが違って、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) (= c^2 \nabla^2 u) \quad (2)$$

今回の問題では図 1 のような境界条件の問題を考える。物理的には半径 $\rho = \rho_0$ で膜を枠に貼り付け、動かなくした太鼓の問題と同じである。このとき c は膜を振動が伝わる速さになり、膜の張力によって決まる量である。

前回同様変数分離から解を求めることを考える。すなわち、

$$u(t, \rho, \phi) = T(t)R(\rho)\Phi(\phi)$$

とする。これを元の波動方程式 (2) に代入して整理すると、

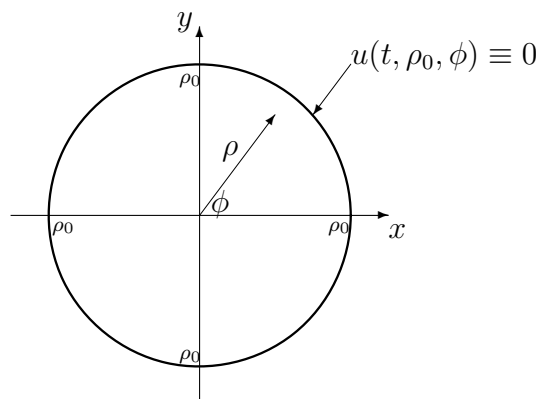


図 1: 境界条件

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\nabla^2 (R\Phi)}{R\Phi} \quad (3)$$

するとこの左辺は t のみの関数、右辺は ρ, ϕ のみの関数となるので、結局ある定数 α に等しくならざるを得ない。よって

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\nabla^2(R\Phi)}{R\Phi} = \alpha \quad (4)$$

さらに $R\Phi$ の部分を分解する。上の式の中辺=右辺を変形すると、

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \alpha \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} (= \beta) \quad (5)$$

再び左辺は ρ のみの式、右辺は ϕ のみの関数なので、両辺ともにある定数 β に等しい。この β が今 $\beta < -a^2$ ($a > 0$) とする (要するに負の数) と、 Φ の解は

$$\Phi = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi} \quad (6)$$

であるが、この解は $\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ で連続かつ滑らかにつなぐことができない。よって不適当な解である (連続性を仮定すると微分が連続となる条件を加える自由度がない)。したがって β は正またはゼロであるとしてよい。そこで以下 $\beta = a^2$ ($a \geq 0$) とおくと、

$$\Phi = A \sin a\phi + B \cos a\phi \quad (7)$$

であるが、三角関数を合成して

$$\Phi = A \cos a(\phi + \phi_0) \quad (8)$$

としてもよい。ただし A は新たに定義しなおしてある。またここで ϕ_0 は座標をどこから取るかを決めているだけなので、物理的には興味のない値である。よって $\phi_0 = 0$ として話を進める。さらにこの関数が $\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ で滑らかにつながるには、周期 2π を持てばよいので、 a は整数でなければならない。よって a を新たに n と書き直してやると、 Φ は

$$\Phi = A \cos n\phi \quad (9)$$

とかける。

すると R の方の式は、

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \left(\alpha + \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (10)$$

となる。

$\alpha = -k^{-2}$ (< 0) の時には、 $k\rho = x$ と書き直せば

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (11)$$

と変形でき、 $\alpha = -k^{-2}$ (> 0) の時には、やはり $k\rho = x$ と書き直せば

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (12)$$

と書くことができる。(11) を Bessel の微分方程式とよぶ。また (12) を変形 Bessel の微分方程式とよぶ。前者は Bessel 関数 J_n と Neumann 関数 N_n として知られる 2 つの独立な解

があることが知られている。これらがどのような関数であるかは Mathematica を用いてプロットさせてみるよい。いずれにせよ Bessel の微分方程式の一般解は J_n と N_n の線形結合で表されることを覚えておこう。また変形 Bessel の微分方程式も 2 つの変形ベッセル関数 I_n と K_n を独立な解として持つ。 Mathematica で Bessel 関数をプロット

一方、 $\alpha = 0$ の時には

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} R = 0 \quad (13)$$

となり、独立な 2 つの解 $R \propto \rho^n, \rho^{-n}$ を持つ。

したがって R は α の符号に応じて、

$$R = AJ_n(k\rho) + BN_n(k\rho) \quad (\alpha < 0) \quad (14)$$

$$R = AI_n(k\rho) + BK_n(k\rho) \quad (\alpha > 0) \quad (15)$$

$$R = A\rho^n + B\rho^{-n} \quad (\alpha = 0) \quad (16)$$

これらが境界条件 $u(t, \rho_0, \phi) \equiv 0$ に適合するかどうか調べてみよう。まず簡単な場合で、 $\alpha = 0$ の場合、原点で振幅が発散しないためには $B = 0$ でなければならない。また、有限の半径 ρ_0 で $R = 0$ にするためには $A = 0$ でもなければならない、結局 $\alpha = 0$ のケースは意味のない解となる。同様に $\alpha > 0$ の場合にも、 K_n が原点付近で発散するので $B = 0$ となり、 I_n が単調増加の関数であるのでやはり ρ_0 で $R = 0$ にするためには $A = 0$ でもなければならない。よって $\alpha > 0$ も除外してよい。 $\alpha < 0$ の場合にはまずやはり原点で発散しないという条件から $B = 0$ がいえるが、 J_n は有限の ρ に対してゼロ点を持つ (Mathematica のプロット参照) ので、境界条件を満たすことができる。したがって

$$R = AJ_n(k\rho) \quad (17)$$

であるが、境界条件を満たすために、 k は、

$$k_{mn}\rho_0 = \omega_{mn} \quad (18)$$

である必要がある。ただしここで ω_{nm} は、 $J_n(x)$ の m 番目のゼロ点を与える x の値と定義する (J_n のプロットと x 軸の交点を与える x 座標)。

よって、 R は

$$R = AJ_n\left(\omega_{mn} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (19)$$

の形となる。

最後に $T(t)$ は、

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\left(\frac{c \omega_{mn}}{\rho_0}\right)^2 T \quad (20)$$

なので、

解は単振動と同じで、

$$T = A_{mn} \sin\left(\frac{c \omega_{mn}}{\rho_0} t\right) + B_{mn} \cos\left(\frac{c \omega_{mn}}{\rho_0} t\right) \quad (21)$$

となる。これらの解 T, R, Φ を掛け合わせた $u = TR\Phi$ をすべての mn に関して足し合わせたものが一般的な解の表式となる。したがって与えられた境界条件を満たす一般解は

$$u(t, \rho, \phi) = \sum_{m,n} \left(A_{mn} \sin\left(\frac{c \omega_{mn}}{\rho_0} t\right) + B_{mn} \cos\left(\frac{c \omega_{mn}}{\rho_0} t\right) \right) J_n\left(\omega_{mn} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \cos n\phi \quad (22)$$

未定の係数 A_{mn}, B_{mn} は本来振動の初期条件（ある時刻で膜がどのように変形されるか、どのような速度で運動しているか）によって決まるべき量である。たとえば太鼓の場合には太鼓のどこをどのくらいの強さでたたか、ということが初期条件を与える。

ここでは複雑な初期状態は気にせず、一般解を構成する各モードの振動のようすを可視化してみよう。

6.2 提出課題

上と同様の問題で、境界条件を以下のように変えた場合の振動にはどのようなモードがあるか？計算した一般的な解の形と、いくつかのモードを可視化した結果を示してください。ヒントとしては箱型の境界条件の場合には $x - y$ 座標をそのまま使い、 \sin, \cos の級数で解を表現するべきである、ということです。

四角の膜で、4辺が留められている条件。すなわち $u(t, x, y)$ で

$$u(t, x, 0) = u(t, 0, y) = u(t, x, L) = u(t, y, L) \equiv 0$$

提出期限：次回授業開始時